

Doğrusal Programlama

GİRİŞ

Yöneylem araştırmasının en gelişmiş ve yaygın uygulama alanını oluşturan **doğrusal programlama**, doğrusal **karar problemleri**yle ilgili kavram ve teknikler topluluğudur. Bu bölümde, önce doğrusal problemlerin **matematiksel modellemesi** anlatılıp, sonra da örnek problemler ele alınıp modellenecektir.

Doğrusal programlama, belirli bir amaca ulaşmak için, bazı **kısıtlayıcılar** altında **kıt kaynakların** en verimli şekilde kullanılmasını sağlayan bir matematiksel yöntemdir. Bu şekilde varılmak istenen amaç, **kâr maksimizasyonu** (en büyükleme) veya **maliyet minimizasyonu** (en küçükleme) olarak belirlenebilir. Doğrusal programlamada “doğrusal” sözcüğü, fonksiyonların doğrusallığını, “programlama” ise planlama işlemini ifade etmektedir. Doğrusal programlama, tüm uygun seçenekler arasında **optimum** (eniyi) sonucun elde edilmesini sağlayan planlama faaliyetlerini içermektedir. Doğal olarak böyle bir programlama sürecinde, önce gerekli veriler toplanır, problem **modellendir** ve daha sonra modelin çözümü araştırılır. Doğrusal programlama modeli kurulurken amacın, değişkenler arasında ilişkilerin ve kullanılacak **kıt kaynakların** tanımlanması gerekir.

Günümüz sistemleri (üretim, dağıtım, vb.) büyük sistemlerdir. Bu büyük sistemlerin modelleri de çok sayıda değişken ve kısıtlayıcıdan oluşmaktadır. Büyük modeller, bilgisayar yardımıyla çözülebildiğinden, doğrusal programlamanın uygulama alanı sadece **kıt kaynakların dağıtımı** ile sınırlı kalmamış, diğer birçok alanda da önemli uygulamalar ortaya konmuştur. Doğrusal programlamanın uygulama alanları ile ilgili olarak aşağıdaki liste verilebilir.

- Ulaştırma ve lojistik problemleri,
- Endüstriyel üretim planlaması ve envanter (stok) kontrolü
- Personel programlaması
- Beslenme(diyet) problemleri
- Karışım problemleri
- Tarımsal planlama
- Finansal planlama
- Yatırım planlaması
- Sağlık sistemleri
- Askeri planlama
- Trafik planlaması
- Atama problemleri
- Reklam seçimi problemleri
- Karışım problemleri

İşletme ve iktisat bilim dallarını da yakından ilgilendiren doğrusal programlama, yöneylem araştırmasında da en yaygın kullanılan araçlardan birisidir. Geniş bir uygulama alanı olan doğrusal programlama, ayrıca işletmelerin karşılaştığı darboğazların giderilmesinde, kıt kaynakların etkin kullanımı ve bunların gölge fiyatlarının belirlenmesi ile en uygun çözümlere ulaştıracak politikaları saptamada kullanılmaktadır.

SIRA SİZDE



Doğrusal programlamanın uygulama alanları nerelerdir?

DOĞRUSAL PROGRAMLAMAMANIN VARSAYIMLARI

Gerçek hayatta karşılaşılan çoğu karar problemi için, en azından uygun kabullerle, doğrusal karar modeli geliştirmek mümkündür. Bir problem için karar modeli geliştirmek ve kurmak **gerçek sistemi matematiksel olarak ifade etmek** demektir. Bu işlem yapılırken bilgi kaybı kaçınılmazdır. Önemli olan en az bilgi kaybı ile dönüşümü gerçekleştirebilmektir. Bu nedenle modelden tutarlı sonuçlar elde edilebilmesi için aşağıdaki varsayımlar kabul edilmelidir.

Doğrusallık (Oranlılık) Varsayımı

Bu varsayım modelin amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcı fonksiyonları ile ilgilidir. Doğrusallık varsayımı, işletmenin girdileri ile çıktıları arasında doğrusal bir ilişkinin olduğunu gösterir. Üretim düzeyi artarken aynı oranda üretim girdileri de artar.

Eğer, X_j 'inci eylem için amacın oluşumu doğrusallık özelliği gösteriyorsa, X_j 'nin her bir birim değerinin kara katkısı c_j iken, X_j 'nin çözüm değerinin amaca katkısı $c_j X_j$ kadar olur. Bunun yanında karar problemine esas olan b_i 'inci kaynaktan her bir birim X_j için gerekli kaynak miktarı a_{ij} olmak üzere X_j için kaynak gereksinimi $a_{ij} X_j$ kadar olur. Kısıtlar ve **amaç fonksiyonu** birinci dereceden fonksiyon olmalıdır. Aksi takdirde, doğrusal olmayan programlama söz konusu olur.

Bu varsayım, her bir **karar değişkeninin**; gerek amaç fonksiyonu, gerekse tük kısıtlayıcılara etkisinin söz konusu değişkenin (X_j) değeriyle doğru orantılı olması gerektiğinin ifade eder.

DİKKAT



Karar değişkenlerine kontrol edilebilen değişkenler denir. İstatistikte değişken X_i -tesadüfi değişkendir ve serbestçe değerler alabilen değişken olarak tanımlanır.

Toplanabilirlik Varsayımı

Doğrusal programlamada her fonksiyon, ilişkili olduğu faaliyetlerin, bireysel katkılarının toplamıdır. **Karar değişkenlerine verilecek değerlere göre, her birinin sağladığı katkılar toplanıp, toplam katkıyı, yani amaç fonksiyonunu oluşturuyorsa, toplanabilirlik varsayımı geçerlidir demektir.** Bu varsayımı, kısıtlayıcıların sol tarafındaki sabitler için ele alırsak; değişik üretim faaliyetlerine kaynak olan, üretim girdilerinin toplamının, her bir işlem için ayrı ayrı kullanılan girdilerin toplamına eşit olduğunu gösterir.

Bölünebilirlik Varsayımı

Modelin karar değişkenleri X_j 'ler, her türlü reel değerleri alabiliyorsa, bölünebilirlik varsayımı sağlanıyor demektir. Böylece, karar değişkenleri, bazı faaliyetlerin düzeyini gösterdiğinden, faaliyetlerin kesirli düzeylerde çalışabileceği varsayılır.

Bazen girdi ve çıktıların bölünmezlik sorunu nedeniyle, karar değişkenlerini tamamının veya bazılarının tam sayı olması gerekebilir. Böyle durumlarda, **tam sayılı programlama** söz konusu olur.

Belirlilik (Kesinlik) Varsayımı

Doğrusal programlama modelindeki tüm parametrelerin (amaç fonksiyonu katsayıları- c_j , sağ taraf sabitleri- b_i ve teknoloji katsayıları- a_{ij}) biliniyor olduğu varsayımdır. Parametre değerlerini kesin olarak biliniyor olması varsayımı, modelin deterministik model olduğunun göstergesidir.

Bir problemde, karar değişkenleri ve parametrelerle ilgili olarak; doğrusallık, toplanabilirlik, bölünebilirlik ve belirlilik varsayımları geçerli ise bu problem doğrusal programlama problemi olarak modellenip çözülebilir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, problemin doğru belirlenmesidir. Parametre değerlerinden kesin değerleri bilinmeyenler için tahmin yoluna gidilebilir. Daha sonra matematiksel modelleme aşamasına geçilmelidir. Fakat modelin doğrusallık ve bölünebilirlik varsayımları, gerçek dünyadaki ilişkileri gözlemlendiğinde bir eksiklik gösterdiği söylenebilir. Denilebilir ki, bu iki varsayım doğrusal programlama yöntemini kısıtlamaktadır.



Doğrusal programlama modeli kurulurken hangi varsayımlar kabul edilmektedir?

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA MODEL KURMA

Model kelime anlamı gerçeğin benzeri demektir. Model kurma, sistemi oluşturan unsurların matematiksel terimlerle ifade edilmesidir. Başka bir deyişle problem, matematik diline tercüme edilir. Model doğrusal programlama gibi standart bir matematiksel model halinde ifade edilebiliyorsa, bilinen **algoritmalar** yardımıyla çözüme ulaşılabilir. Bir problemin, doğrusal programlama modeli kurulurken önce karar değişkenleri tanımlanır, sonrada amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılar formüle edilir.



Algoritma: Problem çözümünde izlenen yol olarak isimlendirilebilir.

Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi

Bir problemin doğrusal programlama modelinin kurulmasına, öncelikle karar değişkenlerinin tanımlanmasıyla başlanır. Karar değişkeni: bir problemde karar vericinin kontrolü altında olup da, değeri araştırılan eylemler, karar değişkenleridir. Herhangi bir doğrusal programlama modelinde karar değişkenleri, alınacak kararları tamamen betimlemelidir. Karar değişkenleri, alınacak kararlara ilişkin faaliyetlerin düzeyini göstermektedir.

Karar değişkenleri genellikle; X_j sembolü ile gösterilir.

X_j : j' inci üründen üretilecek (veya taşınacak) miktar anlamındadır.

($j=1,2,...,n$)

Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi

Herhangi bir doğrusal programlama probleminde karar verici, karar değişkenlerinin bazı fonksiyonunu maksimum veya minimum yapmak ister. Maksimum veya minimum yapılmak istenen fonksiyona, amaç fonksiyonu adı verilir.

Doğrusal programlama modelinden beklenen sonucun alınabilmesi için, amacın açık olarak bilinmesi ve nicel olarak yazılımı gerekmektedir. Modelin amaç fonksiyonu yazılırken;

Karar değişkenleri: $X_1, X_2, ..., X_n$

Birim kâr veya maliyet katsayıları $c_1, c_2, ..., c_j, ..., c_n$ ile gösterildiğinde,

Amaç fonksiyonu:

$$\text{Max/Min } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_jX_j + \dots + c_nX_n$$

veya genel olarak

$$\text{Max/Min } Z = \sum_j c_j X_j \quad (j=1,2,\dots,n)$$

şeklinde de yazılabilir.

Kısıtlayıcıların Belirlenmesi

Ekonomide üretim kaynakları veya üretim faktörleri sınırlıdır. Bir işletmenin elindeki makine kapasitesi, teknolojisi, işgücü, enerji, sermaye, hammadde, yarı mamul madde, malzeme gibi üretim faktörleri ile ürünlerine olan talep de sınırlıdır. Dolayısıyla karar değişkenlerinin miktarı da sınırlı olacaktır. Önemli olan, bu kısıtlayıcılar altında amaç fonksiyonunu sağlayan ürünler üretmektir.

İşletmenin faaliyetlerinde,

b_i : i'inci kaynak miktarı (i'inci kısıtın sağ taraf sabiti), $(i=1,2,3, \dots m)$

a_{ij} : bir birim X_j için gerekli i'inci kaynak miktarı (X_j 'lerin i'inci kısıttaki teknoloji katsayıları)

sembolleri ile gösterirsek, m kısıt ve n karar değişkeninden oluşan doğrusal kısıtlayıcı fonksiyonların genel hali aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1j}X_j + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2j}X_j + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ij}X_j + \dots + a_{in}X_n \leq b_i$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mj}X_j + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$



Kısıtlayıcılardaki karar değişkenlerinin katsayıları (a_{ij}), farklı ürünlerin üretiminde kullanılan teknolojiyi yansıttığı için, teknolojik katsayılar adı verilir.

Kısıtlayıcıların sağ taraf sabitlerini oluşturan b_i 'ler daha önce ifade ettiğimiz gibi elverişli kaynak miktarını gösterir. Bu kaynak miktarları kısıtlayıcı fonksiyonuna göre her zaman sınırlı olmaz. Bazen karar değişkenlerinin istediğinden fazla veya tam eşitlikte olabilir. Bu nedenle kısıtlayıcı denklemler, “=” eşitlik şeklinde olabileceği gibi, eşitsizlik şeklinde de olabilir. Eşitsizlik durumu, yukarıda görüldüğü gibi “ $\leq$ ” (küçük eşit) şeklinde olabileceği gibi, “ $\geq$ ” (büyük eşit) şeklinde de olabilir.

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ij}X_j + \dots + a_{in}X_n \geq b_i$$

veya

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \dots + a_{ij}X_j + \dots + a_{in}X_n = b_i$$

Kısıtlayıcı fonksiyonlar genel olarak aşağıdaki şekilde de gösterilebilir.

$$\sum_i \sum_j a_{ij} X_j \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} b_i \quad \begin{matrix} (i=1,2,\dots,m) \\ (j=1,2,\dots,n) \end{matrix}$$

İşaret Kısıtlaması

Doğrusal programlama probleminin matematiksel modelini tamamlamak için her bir karar değişkeninin negatif olmama varsayımını sağlaması gerekir. Karar değişkeni X_j 'nin sadece pozitif değerli olduğu varsayılırsa, " $X_j \geq 0$ " işaret kısıtı modele eklenir.

$$X_j \geq 0 \quad (j=1,2, \dots, n)$$

Şimdi doğrusal programlama modelinin matematiksel yazılımı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\text{Max/Min } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

Kısıtlayıcılar

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m$$

$$\text{ve } X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

Herhangi bir doğrusal programlama modeli, belirlenen amaç fonksiyonunu minimize veya maksimize edecek karar değişkenlerinin değerini bulmak için kurulur.

SIRA SİZDE

3

Doğrusal programlama modelinin temel bileşenleri nelerdir?

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODEL KURMA UYGULAMALARI

Bu başlık altında doğrusal programlamanın varsayımları altında bir problemin, doğrusal programlama modeli olarak nasıl ifade edilebileceği, örneklerle anlatılmaya çalışılacaktır. Bir karar problemi için model geliştirme öncesinde amacın, karar değişkenlerinin ve parametrelerin tanımlanmış olması gerekir. Doğrusal programlamanın uygulama alanlarını örneklemek ve modellemek için aşağıdaki bazı problemlerin modellenmesi ele alınacaktır.

Üretim Planlaması

Doğrusal programlamanın en yaygın kullanıldığı alanlardan birisi, üretim işletmelerin de maksimum karlı veya minimum maliyetli üretim bileşenlerini belirlemede kullanılmasıdır.

Örnek 2.1. Bir marangoz işletmesi masa ve sandalye üretmektedir. Bir masa yapımı için 30 metre tahtaya ve 5 saat iş gücüne gerek vardır. Bir sandalye yapımı için de 20 metre tahtaya ve 10 saat iş gücüne gerek vardır. İşletmenin elinde 300 metre tahta ile 110 saat iş gücü vardır. Ayrıca bir masanın satışından elde edilen kâr ₺6 ve bir sandalyenin satışından elde edilen kâr ₺8'dir. İşletmenin amacı maksimum kara ulaşmaktır. Buna göre marangoz işletmesi ne kadar masa ve sandalye üretmelidir. Problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

Çözüm: Karar değişkenleri:

X_1 : üretilecek masa miktarını,

X_2 : üretilecek sandalye miktarını, gösterebiliriz.

Amaç fonksiyonu:

$$\text{Max } Z = 6 X_1 + 8 X_2$$

(Toplam kar. Üretilen X_1 adet masa ve X_2 adet sandalyeden elde edilecek karların toplamı.)

Kısıtlayıcılar

$$30X_1 + 20X_2 \leq 300 \quad (\text{tahta kısıtı})$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 110 \quad (\text{iş gücü kısıtı})$$

$$\text{ve } X_1, X_2 \geq 0$$

Örnek 2.2. Bir işletme X,Y ve Z gibi üç ürün üretmektedir. Bir birim X üretiminde 1 birim A malı girdisi ile 1 birim B malı girdisi kullanılmaktadır. Bir birim Y malı üretiminde ise 1 birim A malı ile 2 birim B malı girdisi kullanılmaktadır. Birim Z üretiminde ise sadece A malı girdisi kullanılmaktadır. İşletmenin elinde kullanılabilir 40 birim A malı ile 20 birim B malı bulunmaktadır.

Öte yandan, bir birim X malının satış fiyatı ₺10, bir birim Y malının satış fiyatı ₺15 ve bir birim Z malının satış fiyatı ise ₺12'dir. Bu X,Y,Z mallarının birim üretim maliyetleri sırasıyla ₺8, ₺9 ve ₺7'dir. Buna göre işletmenin karını maksimum kılabilmek için üretim bileşimi ne olmalıdır. Problemi doğrusal programlama modeli halinde ifade ediniz.

Çözüm: Karar değişkenleri:

X_1 : üretilen X ürününün miktarını,

X_2 : üretilen Y ürününün miktarını,

X_3 : üretilen Z ürününün miktarını, göstereceğiz.

Amaç karın maksimizasyonu olduğundan, öncelikle işletmenin ürettiği üç ürün için birim net karlarının bulunması gerekmektedir.

Birim kar: Birim satış fiyatı – birim üretim maliyeti

Buna göre X_1 'in net karı ₺2, X_2 'nin net karı ₺6 ve X_3 'ün net karı da ₺5' dir.

Amaç fonksiyonu:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 6X_2 + 5X_3$$

Kısıtlayıcılar

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 40 \quad (\text{A malı girdisi})$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 20 \quad (\text{B malı girdisi})$$

$$\text{ve } X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Örnek 2.3. Bir metalik parça üreten atölye A ve B mamullerini imal etmektedir. A' dan ₺3 /parça ve B' den ₺2 /parça kâr edebilmektedir. Her gün, her bir mamulden 12 düzine satabilmektedir. Atölyede torna, freze ve taşlama olmak üzere üç tezgâh vardır.

- A mamulünden bir birim üretebilmek için, tornada 5 dakika, frezede 7 dakika ve taşlamada 4 dakika işlem görmesi gerekmektedir.
- B mamulünden bir birim üretebilmek için, tornada 3 dakika, frezede 9 dakika ve taşlamada 7 dakika işlem görmesi gerekmektedir.

Atölyede bir torna, bir freze ve bir taşlama tezgâhı vardır. Bu tezgâhlar başka işlerde de kullanıldığı için sadece aşağıda belirtilen miktarlarda boş zamanları vardır.

	Tezgah boş Zamanı (dak.)
Torna	65
Freze	100
Taşlama	90

A ve B'den ne kadar üretilsin ki maksimum kara ulaşılsın. Problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

Çözüm: Karar değişkenleri:

X_1 : A mamulünden üretilen miktarı,

X_2 : B mamulünden üretilen miktarı, gösterebilir.

Talep: 12 düzine $\rightarrow 12 \times 12 = 144$ adet olmak üzere,

Amaç fonksiyonu;

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Kısıtlayıcılar

$$X_1 \leq 144 \text{ (talep)}$$

$$X_2 \leq 144 \text{ (talep)}$$

$$5X_1 + 3X_2 \leq 65 \text{ (torna zamanı)}$$

$$7X_1 + 9X_2 \leq 100 \text{ (freze zamanı)}$$

$$4X_1 + 7X_2 \leq 90 \text{ (taşlama zamanı)}$$

$$\text{ve } X_1, X_2 \geq 0$$

Örnek 2.4. BORSAN firmasının üç fabrikası var ve her fabrikada üç ayrı boyda boru üretilmektedir. Üç boyda boru satışından elde edilen birim karlar şöyledir. Büyük boy için ₺800, orta boy için ₺600 ve küçük boy için de ₺540. Üç fabrikadaki emek ve makine güçlerine göre ancak haftada 1 nolu fabrikada 800 birim, 2 nolu fabrikada 650 birim ve 3 nolu fabrikada 450 birim ürün üretebilmektedir.

Fabrikaların stoklama alanları da sınırlıdır. 1 nolu fabrikanın 1400m², 2 nolu fabrikanın 1250 m² ve üç nolu fabrikanın da 800 m²'lik stoklama alanı vardır. Büyük boy boru haftalık üretiminde 2,5 m², orta boy boru haftalık üretiminde 2 m² ve küçük boy boru haftalık üretimi için 1,5 m² yere gerek vardır.

Satış bölümünün tahminine göre haftada büyük boy borudan 800, orta boy borudan 900 ve küçük boy borudan 600 birim satılabilmektedir. Öte yandan, yönetim üç fabrikada üretilen malların göreceli sayısının emek ve makine kapasitelerine denk oranda olmasını istemektedir.

Yönetim, karını en çok yapabilmek için üç fabrikada her bir boydan ne kadar birimlik ürün üretilmesi gerektiğini saptamak istemektedir.

Problemi doğrusal programlama modeli olarak kurunuz.

Çözüm: Bu problemde, karar değişkenleri ve parametreleri fabrika-ürün ilişkisini belirtecek şekilde çift indisli göstermek yerinde olacaktır.

Karar değişkenleri

X_{ij} = i'inci fabrikada üretilen j'inci boyda boru miktarı.

(i=1,2,3)

(j= 1 büyük, j=2 orta, j=3 küçük)

Amaç fonksiyonu:

$$\text{Max } Z = 800(X_{11}+X_{21}+X_{31})+600(X_{12}+X_{22}+X_{32})+540(X_{13}+X_{23}+X_{33})$$

Kısıtlayıcılar

Emek ve makine kapasiteleri kısıtlayıcıları

$$X_{11}+X_{12}+X_{13} \leq 800$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23} \leq 650$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33} \leq 450$$

Stoklama alanı kısıtlayıcıları

$$2,5X_{11}+2X_{12}+1,5X_{13} \leq 1400$$

$$2,5X_{21}+2X_{22}+1,5X_{23} \leq 1250$$

$$2,5X_{31}+2X_{32}+1,5X_{33} \leq 800$$

Satış tahmini kısıtlayıcıları

$$X_{11}+X_{21}+X_{31} \leq 800$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32} \leq 900$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33} \leq 600$$

Her fabrikada yönetimin istediği denk oranlar şu şekilde gösterilebilir.

$$\frac{X_{11} + X_{12} + X_{13}}{800} = \frac{X_{21} + X_{22} + X_{23}}{650} = \frac{X_{31} + X_{32} + X_{33}}{450}$$

Bu eşitlik, iki ayrı doğrusal kısıtlayıcı olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$650(X_{11}+X_{12}+X_{13}) - 800(X_{21}+X_{22}+X_{23}) = 0$$

$$450(X_{21}+X_{22}+X_{23}) - 650(X_{31}+X_{32}+X_{33}) = 0$$

Böylece model bütün olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\text{Max } Z = 800(X_{11}+X_{21}+X_{31})+600(X_{12}+X_{22}+X_{32})+540(X_{13}+X_{23}+X_{33})$$

Kısıtlayıcılar

$$X_{11}+X_{12}+X_{13} \leq 800$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23} \leq 650$$

$$X_{31}+X_{32}+X_{33} \leq 450$$

$$2,5X_{11}+2X_{12}+1,5X_{13} \leq 1400$$

$$2,5X_{21}+2X_{22}+1,5X_{23} \leq 1250$$

$$2,5X_{31}+2X_{32}+1,5X_{33} \leq 800$$

$$X_{11}+X_{21}+X_{31} \leq 800$$

$$X_{12}+X_{22}+X_{32} \leq 900$$

$$X_{13}+X_{23}+X_{33} \leq 600$$

$$650(X_{11}+X_{12}+X_{13}) - 800(X_{21}+X_{22}+X_{23}) = 0$$

$$450(X_{21}+X_{22}+X_{23}) - 650(X_{31}+X_{32}+X_{33}) = 0$$

$$\text{ve } X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3) \quad (j=1,2,3)$$

Örnek 2.5. Atlas Mobilya, “Köy Tipi” ve “Modern” olmak üzere iki değişik tip vitrin imal etmektedir. Her bir vitrin imal edilirken marangozluk, boyama ve son kontrol olmak üzere üç işlemden geçmektedir. Aşağıda görülen tabloda imal edilen her vitrin için işlem süresi (saat), günlük her işlem-üretim kapasitesi (saat) ve üretilen her üründen elde edilen net kâr (₺) ile ilgili bilgiler yer almaktadır. Firmanın, bir dağıtıcı firmayla, haftada her bir vitrinden minimum 300 adet (günlük 60 adet) üretmesi hususunda anlaşması mevcuttur. Firma sahibi, günlük gelirini maksimum eden üretim karışımına karar vermek istemektedir. Problemin doğrusal programlama modelini kurunuz.

Vitrin tarzı	Marangozluk	Boyama	Son kontrol	Net kar
Köy tipi	3	1,5	$\frac{3}{4}$	₺28
Modern	2	1	$\frac{3}{4}$	₺25
İşlem kapasite	360	200	125	

Çözüm: Karar değişkenleri;

X_1 : Köy tipi vitrinden günlük üretim miktarı,

X_2 : Modern tip vitrinden günlük üretim miktarı.

Amaç fonksiyonu

$$\text{Max. } Z = 28 X_1 + 25 X_2$$

Kısıtlayıcılar

$$180 X_1 + 120 X_2 \leq 21600 \text{ dakika}$$

$$90 X_1 + X_2 \leq 12000$$

$$45 X_1 + 45 X_2 \leq 7500$$

$$X_1 \leq 60$$

$$X_2 \leq 60$$

$$\text{ve } X_1, X_2 \geq 0$$



Sağ taraf sabitleri ve teknik katsayılar saatten dakika cinsine dönüştürülmüştür.

Tarım Planlaması

Tarım sektöründe çiftçiler için en önemli problem, en çok karı sağlamak için eldeki arazinin ürün türlerine göre taksimi nasıl olmalıdır? Ayrıca arazinin üretim verimliliğinin bilinmesi halinde, hangi üründen ne kadar üretim elde edilebileceği de belirlenebilmektedir.

Örnek 2.6. Bir çiftçinin toplam 100 dönümlük arazisi vardır. Yetiştirebildiği kadar; mısır, fasulye ve karpuz satabilmektedir. Mısır ₺3/kg, fasulye ₺2/kg ve karpuz ₺0,25/kg kâr getirmektedir. Bütün bu ürünler için aynı gübre kullanılabilir ve gübrenin fiyatı ₺2 /kg’ dır. Gereken gübre miktarı mısır için 20 kg/dönüm, fasulye için 10 kg/dönüm ve karpuz için 5 kg/dönümdür. Beklenen ürün miktarı 100 kg mısır/dönüm, 80 kg fasulye/dönüm ve 1000 kg karpuz/dönümdür. Bütün ürünün 5 gün içinde toplanması gerekir. Toplam 20 işçi vardır ve her birinin ücreti ₺30/gün’dür. Her bir işçi günde 10 saat çalışabilmektedir. Mısırı toplamak için 20 işçi saati/dönüm, fasulyeyi toplamak için 8 işçi saati/dönüm ve karpuz toplamak için 12 işçi saati/dönüm gerekmektedir. Buna göre çiftçinin karını maksimum kılacak ürün ekimi ne olmalıdır. Problemi doğrusal programlama problemi olarak ifade ediniz.

Çözüm: Karar değişkenleri:

X_1 : mısır ekilecek arazi(dönüm) miktarını,

X_2 : fasulye ekilecek arazi(dönüm) miktarını,

X_3 : karpuz ekilecek arazi(dönüm) miktarını, gösterebilir.

Amaç karın maksimizasyonu olduğundan, öncelikle çiftçinin üreteceği üç ürün için birim karlarının bulunması gerekmektedir.

$$\begin{aligned}\text{Mısır kâr} &= (\text{₺}3/\text{kg} \times 100\text{kg/dönüm}) - \text{₺}2/\text{kg} \times 20 \text{ kg/dönüm} - \text{₺}30/\text{gün} \times 2 \text{ gün/dönüm} \\ &= 300 - 40 - 60 = \text{₺}200/\text{dönüm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Fasulye kâr} &= (\text{₺}2/\text{kg} \times 80\text{kg/dönüm}) - \text{₺}2/\text{kg} \times 10 \text{ kg/dönüm} - \text{₺}30/\text{gün} \times 8/10 \text{ gün/dönüm} \\ &= 160 - 20 - 24 = \text{₺}116/\text{dönüm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Karpuz kâr} &= (\text{₺}0,25/\text{kg} \times 1000\text{kg/dönüm}) - \text{₺}2/\text{kg} \times 5 \text{ kg/dönüm} - \text{₺}30/\text{gün} \times 12/10 \text{ gün/dönüm} \\ &= 250 - 10 - 36 = \text{₺}204/\text{dönüm}\end{aligned}$$

Amaç fonksiyonu;

$$\text{Max } Z = 200X_1 + 116X_2 + 204X_3$$

Kısıtlayıcılar

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 100 \quad (\text{arazi kısıtı})$$

$$20X_1 + 8X_2 + 12X_3 \leq 1000 \quad \leftarrow (20 \text{ işçi} \times 10 \text{ saat} \times 5 \text{ gün}) \quad \leftarrow (\text{iş gücü kısıtı})$$

$$\text{ve } X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Karışım Problemi

Örnek 2.7. Kümes havanı besicilerine yem üretip satan bir firma minimum maliyetli yemi üretmeyi istemektedir. Her bir tavuğun 1. 2. ve 3. besleyici elemandan (vitaminden) günde 250, 150 ve 400 birimlik ihtiyacı olduğu varsayılmaktadır. Bu besleyici elemanlar A,B,C ve D besin maddelerinin aşağıda belirtilen miktarlarında (kilo başına) karışımlarından elde edilebilir.

Besleyici Elemanlar (vitamin, protein vb.)	Besleyici maddeler A B C D				Minimum Günlük ihtiyaç
1.besleyici elemen	20	15	10	30	250
2. besleyici elemen	25	15	20	25	150
3. besleyici elemen	25	20	20	30	400
Besleyici madde → Birim fiyatları	₺30/kg	10	20	40	

Yemi üreten firma besin maddelerinden, hangi oranda karıştırıp imal etmeli ki, maliyet minimum olsun ve yem günlük beslenme (vitamin, protein, vb.) ihtiyacını karşılasın. Problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

Çözüm: Karar değişkenleri:

X_1 : A besin maddesinden yeme katılacak miktarı,

X_2 : B besin maddesinden yeme katılacak miktarı,

X_3 : C besin maddesinden yeme katılacak miktarı,

X_4 : D besin maddesinden yeme katılacak miktarı, gösterebilir.

Amaç fonksiyonu;

$$\text{Max } Z = 30X_1 + 10X_2 + 20X_3 + 40X_4$$

Kısıtlayıcılar

$$20X_1 + 15X_2 + 10X_3 + 30X_4 \geq 250$$

$$25X_1 + 15X_2 + 20X_3 + 25X_4 \geq 150$$

$$25X_1 + 20X_2 + 20X_3 + 30X_4 \geq 400$$

$$\text{ve } X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Ulaştırma ve Lojistik Problemler

Ulaştırma ve dağıtıma ilişkin problemler, daha geniş anlamda lojistik problemler, ulaştırma ve atama problemleri bölümünde daha sonra ele alınacaktır. Burada amaç ulaştırma ve lojistik problemlerinin, nasıl doğrusal programlama modeli olarak ifade edileceğini göstermektir.

Örnek 2. 8. ATLAS Lastik işletmesi, üç fabrikasında kamyon lastiği üretmektedir. Bu ürünlerini, dört ayrı bölgede bulunan bayilerine göndererek, bayileri aracılığı ile pazarlamaktadır. Fabrikaların aylık üretim kapasiteleri, bayilerin aylık talepleri ve her bir fabrikadan her bir bayiye birim taşıma maliyetleri aşağıda verilmiştir.

Fabrikalar	A	B	C	Toplam
Aylık üretim kapasitesi	380.000	220.000	350.000	950.000

Bayilerin gelecek ay talepleri ise:

Bayi	1	2	3	4	Toplam
Talep	180.000	250.000	340.000	150.000	920.000 adet

Birim taşıma maliyetleri (*100)

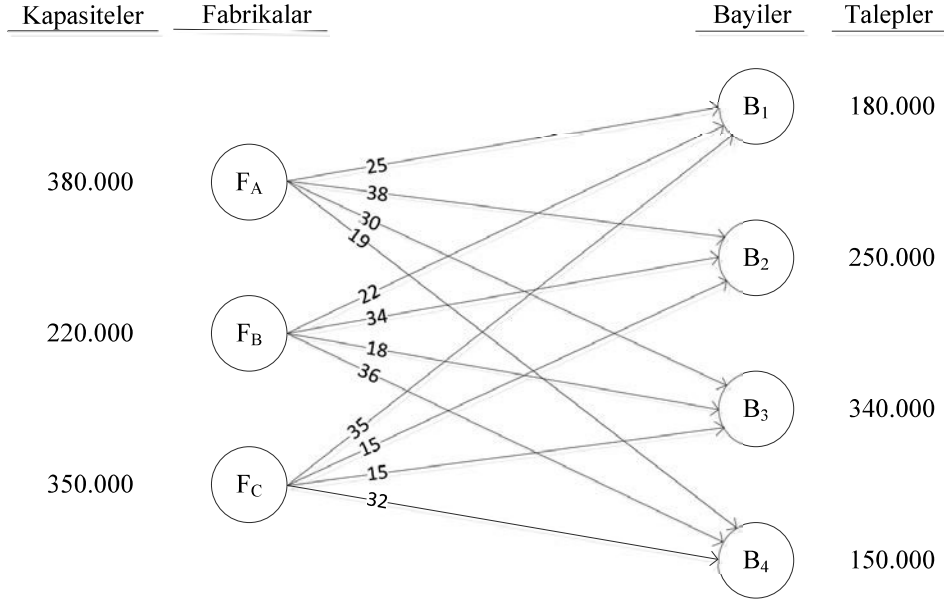
Bayi				
Fab.	1	2	3	4
A	25	38	30	19
B	22	34	18	36
C	35	15	15	32

Hangi fabrikadan hangi bayiye, minimum maliyetle ne kadar lastik gönderilebileceğinin bilinmesi istenmektedir. Bir ulaştırma problemi olan bu problemin, doğrusal programlama modelini kurunuz.

Çözüm: Bu problemde, karar değişkenleri ve parametreleri fabrika-bayi ilişkisini belirtecek şekilde (Şekil 2.1.) çift indisli göstermek yerinde olacaktır.

Karar değişkenleri;

X_{ij} = i ' inci fabrikadan j ' inci bayiye gönderilecek lastik miktarı, (i=1,2,3) (j=1,2,3,4)



Şekil 2.1: Fabrikalardan bayilere ulaştırma şebekesi

Amaç fonksiyonu, toplam taşıma maliyetinin minimum kılınmasıdır. Kısıtlayıcılar ise, fabrika kapasite kısıtları ve bayi talep kısıtları olacaktır. Buna göre problemin doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi yazılır.

$$\text{Max } Z = 25X_{11} + 38X_{12} + 30X_{13} + 19X_{14} + 22X_{21} + 34X_{22} + 18X_{23} + 36X_{24} + 35X_{31} + 15X_{32} + 15X_{33} + 32X_{34}$$

Kısıtlayıcılar

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 380.000$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 220$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 350$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 180.000$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 250.000$$

$$X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 340.000$$

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 150.000$$

$$\text{ve } X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3) \quad (j=1,2,3,4)$$

Örnek 2.9. Bir kargo uçağının üç bölmesi: ön bölme, orta bölme ve arka bölme vardır. Bu bölmelerin ağırlık ve alan kapasiteleri aşağıda belirtildiği kadardır.

Bölme	Ağırlık kapasite(ton)	Alan kapasite(m ³)
Ön bölme	120	7.000
Orta bölme	180	9.000
Arka bölme	100	5.000

Bununla birlikte, ilgili bölümlerdeki kargoların ağırlığı, uçağın dengeli sürülebilmesi için, her bir bölmenin ağırlık kapasiteleriyle denk oranda olması gerekmektedir. Alan uygun olduğu sürece uçuşa hazır uçağa yüklenmesi önerilen dört tip kargo türü vardır.

Kargo türü	Ağırlık(ton/adet)	Hacim(m ³ /adet)	Kar(₺/ton)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

Bu kargolardan herhangi bir türü veya birden çok türü kabul edilebilir. Bu bilgilere göre, toplam karı maksimum yapmak için, hangi tür kargodan ne kadar kabul edilmeli ve bunlar bölmeler arasında nasıl dağıtılmalıdır. Problemi doğrusal programlama modeli olarak kurunuz.

Çözüm: Karar değişkenleri:

X_{ij} : i'inci bölüme konacak j'inci kargo türü miktarları (i=1,2,3) (j=1,2,3,4)

Amaç fonksiyonu;

$$\text{Max } Z = 320(X_{11}+X_{21}+X_{31}) + 400(X_{12}+X_{22}+X_{32}) + 360(X_{13}+X_{23}+X_{33}) + 290(X_{14}+X_{24}+X_{34})$$

Kısıtlayıcılar

Kapasite kısıtları(ağırlık)

$$20X_{11}+16X_{12}+25X_{13}+13X_{14} \leq 120$$

$$20X_{21}+16X_{22}+25X_{23}+13X_{24} \leq 180$$

$$20X_{31}+16X_{32}+25X_{33}+13X_{34} \leq 100$$

Kapasite kısıtları(hacim)

$$500X_{11}+700X_{12}+600X_{13}+400X_{14} \leq 7000$$

$$500X_{21}+700X_{22}+600X_{23}+400X_{24} \leq 9000$$

$$500X_{31}+700X_{32}+600X_{33}+400X_{34} \leq 5000$$

Denge kısıtları

$$180(X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14})-120(X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}) = 0$$

$$100(X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24})-180(X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}) = 0$$

$$\text{ve } X_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4$$



Denge kısıtları $\frac{X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}}{120} = \frac{X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}}{180} = \frac{X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}}{100}$ 'dan gelmektedir.

Örnek. 2.10. Otomobil imal eden bir firmanın 5 yerde montaj fabrikası ve 12 farklı yerde satış bayisi vardır. Fabrikaların Üretim kapasiteleri sırasıyla: Fab.-A-100 adet, Fab.-B-40 adet, Fab.-C-120 adet, Fab.-D-80 adet ve Fab.-E-90 adettir. Firma fabrikalardan bayilere taşıma maliyetini minimize etmek istemektedir. Buna göre hangi fabrikadan hangi bayiye ne kadar araba gönderilmelidir?

Bayi No:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Talep Edilen Araç Sayısı :	35	42	28	52	17	33	62	61	43	37	28	42

Taşıma Maliyetleri (Araba Başına) (*100.)

	Bayi No											
Fab.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	25	36	31	20	27	33	27	21	24	35	21	24
B	37	23	28	35	19	31	23	25	28	27	19	31
C	26	19	17	28	27	36	31	24	21	27	17	30
D	42	25	15	32	23	28	29	33	26	29	20	27
E	19	31	45	37	31	34	27	31	32	30	22	25

Yukarıdaki bilgilerden yararlanarak doğrusal programlama modelini kurunuz.

Çözüm: Karar değişkenleri,

X_{ij} : i . fabrikadan j. bayiye gönderilecek araba sayısı

(i= A,B,C,D,E) → fabrikalar

(j = 1,2, ... , 12) → bayiler

Amaç fonksiyonu;

$$\text{Max } Z = (25X_{A1} + 36X_{A2} + \dots + 24X_{A12}) + (37X_{B1} + 23X_{B2} + \dots + 31X_{B12}) + (26X_{C1} + 19X_{C2} + \dots + 30X_{C12}) + (42X_{D1} + 25X_{D2} + \dots + 27X_{D12}) + (19X_{E1} + 31X_{E2} + \dots + 25X_{E12})$$

Kısıtlayıcılar

Bayii talep kısıtları

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} + X_{D1} + X_{E1} = 35$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} + X_{D2} + X_{E2} = 42$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3} + X_{E3} = 28$$

$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} + X_{D4} + X_{E4} = 52$$

$$X_{A5} + X_{B5} + X_{C5} + X_{D5} + X_{E5} = 17$$

$$X_{A6} + X_{B6} + X_{C6} + X_{D6} + X_{E6} = 33$$

$$X_{A7} + X_{B7} + X_{C7} + X_{D7} + X_{E7} = 62$$

$$X_{A8} + X_{B8} + X_{C8} + X_{D8} + X_{E8} = 61$$

$$X_{A9} + X_{B9} + X_{C9} + X_{D9} + X_{E9} = 43$$

$$X_{A10} + X_{B10} + X_{C10} + X_{D10} + X_{E10} = 37$$

$$X_{A11} + X_{B11} + X_{C11} + X_{D11} + X_{E11} = 28$$

$$X_{A12} + X_{B12} + X_{C12} + X_{D12} + X_{E12} = 42$$

Fabrika kapasite kısıtları,

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} + X_{A5} + X_{A6} + X_{A7} + X_{A8} + X_{A9} + X_{A10} + X_{A11} + X_{A12} \leq 100$$

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} + X_{B5} + X_{B6} + X_{B7} + X_{B8} + X_{B9} + X_{B10} + X_{B11} + X_{B12} \leq 90$$

$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} + X_{C5} + X_{C6} + X_{C7} + X_{C8} + X_{C9} + X_{C10} + X_{C11} + X_{C12} \leq 120$$

$$X_{D1} + X_{D2} + X_{D3} + X_{D4} + X_{D5} + X_{D6} + X_{D7} + X_{D8} + X_{D9} + X_{D10} + X_{D11} + X_{D12} \leq 80$$

$$X_{E1} + X_{E2} + X_{E3} + X_{E4} + X_{E5} + X_{E6} + X_{E7} + X_{E8} + X_{E9} + X_{E10} + X_{E11} + X_{E12} \leq 90$$

$$\text{ve } X_{ij} \geq 0 \quad (i = A, B, C, D, E) \quad (j = 1, 2, \dots, 12)$$

Personel Programlaması

Doğrusal programlama işletmelerde minimum maliyetli işgücü gereksinimini karşılamada, eğitim-öğretim planlaması gibi konularda etkin şekilde kullanılmaktadır.

Örnek 2.11. Bir ulaştırma işletmesinde haftanın farklı günlerinde tam gün çalışacak araç sürücülerine ihtiyacı vardır. Haftanın günleri için ihtiyaç duyulan sürücü sayıları aşağıdaki gibidir.

Pazartesi	25
Salı	21
Çarşamba	23
Perşembe	27
Cuma	22
Cumartesi	24
Pazar	19

Çalışma yasalarına göre her bir sürücü, tam gün birbirini izleyen beş gün çalışıp, iki gün dinlenmelidir. Bu iş yeri hangi günlerde kaç sürücüyü işe başlatarak, toplam istihdam edeceği sürücü sayısını minimize edebilir. Bu iş yeri problemi için doğrusal programlama modelini kurunuz.

Çözüm: Öncelikle karar değişkenleri tanımlamamız gerektiğinden ilk akla gelen;

X_j : j'inci gün, işte olan sürücü sayısı

X_1 : Pazartesi işte olacak sürücü sayısı, X_2 : Salı işte olacak sürücü sayısı,... Bunun sonucunda amaç fonksiyonu: Pazartesi'nden başlayarak, Pazar'a kadar işte olanları toplamı olacaktır. Kısıtlayıcılar ise, haftanın günlerinde işte bulunması gereken en az sürücü sayısı olacaktır.

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$$

Kısıtlayıcılar

$$X_1 \geq 25$$

$$X_2 \geq 21$$

$$X_3 \geq 23$$

$$X_4 \geq 27$$

$$X_5 \geq 22$$

$$X_6 \geq 24$$

$$X_7 \geq 19$$

$$X_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6,7)$$

Bu model iki açıdan yetersiz kalır. Birincisi amaç fonksiyonu, işletmede tam gün istihdam edilecek sürücü toplamını vermez. Çünkü her sürücü ancak beş gün çalıştırılabilmektedir. Örneğin Pazartesi günü işte, Pazartesi başlayanların yanında, daha önceki günlerde başlayıp işteki beşinci, dördüncü, üçüncü... gününü çalışanlar da vardır. İkincisi, bazı değişkenler birbiri ile ilişki halindedir. Örneğin Pazartesi çalışanların bazıları Salı günü de işte olacaktır.

Şu halde ilk akla gelen karar değişkeni tanımının yetersiz olduğu ortaya çıkmıştır. Bu problemde bizden istenen, işletmenin tam gün çalışacak sürücü ihtiyacını karşılamak üzere, haftanın günlerinde kaç sürücünün işe başlayacağını bulmak olacaktır. Bunun için karar değişkenini yeniden tanımlamak gerekecektir.

Karar değişkenleri;

X_1 : Pazartesi günü işe başlayacak sürücü sayısı

X_2 : Salı günü işe başlayacak sürücü sayısı

X_3 : Çarşamba günü işe başlayacak sürücü sayısı

X_4 : Perşembe günü işe başlayacak sürücü sayısı

X_5 : Cuma günü işe başlayacak sürücü sayısı

X_6 : Cumartesi günü işe başlayacak sürücü sayısı

X_7 : Pazar günü işe başlayacak sürücü sayısı

Karar değişkenlerini böyle tanımladığımızda Pazartesi için en az 25 sürücü işte olmalıdır kısıtı;

$$X_1 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 25$$

şeklinde olacaktır. Diğer günler içinde benzer düşünce geçerlidir.

Amaç fonksiyonu haftanın günlerinde işe başlayacakların sayıları toplamı olacak, böylece toplam istihdam edilecek sürücü sayısını verecektir. Problemin doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi yazılır.

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7$$

Kısıtlayıcılar

$$X_1 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 25 \quad (\text{Pazartesi kısıtı})$$

$$X_1 + X_2 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 21 \quad (\text{Salı kısıtı})$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_6 + X_7 \geq 23 \quad (\text{Çarşamba kısıtı})$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_7 \geq 27 \quad (\text{Perşembe kısıtı})$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \geq 22 \quad (\text{Cuma kısıtı})$$

$$X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \geq 24 \quad (\text{Cumartesi kısıtı})$$

$$X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 \geq 19 \quad (\text{Pazar kısıtı})$$

$$X_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5,6,7)$$

Beslenme (Diyet) Problemleri

Diyet günlük tüketilen yiyecek ve içecekler verilen genel bir isimdir. Diyet problemi, **sağlık için gerekli temel besinleri karşılayacak en ekonomik diyet ne olmalıdır?** Şeklinde bir sorudur. Bir başka ifade ile türlü yiyecek ve içeceklerden en uygununun seçimidir. Doğrusal programlama ile modellenip, çözülen ilk ekonomik problemde biri de diyet problemidir. İlk önceleri diyet probleminin, sayısal bir örneği alınarak çözümü araştırılmış, daha sonra beslenmeyle ilgili ilginç uygulamaları yapılmıştır. Günümüzde toplu beslenme yerlerinde (öğrenci veya işçi yemekhanelerinde), büyük şantiyelerde, gemi-denizaltı vb. yerlerde beslenme planlaması doğrusal programlama ile yapılmaktadır.

Örnek 2.12. İnsan sağlığı ile ilgili araştırma kurumları, normal gelişmiş sağlıklı bir yetişkin insanın ne tür ve ne miktarda besleyici elementlere ihtiyaç duyduğunu, yaptıkları bilimsel çalışmalarda belirlemişlerdir. Belirlenen söz konusu verilerin bir kısmının sağlıklı beslenme internet sitelerinde yer aldığı görülebilir.



<http://saglik.turk.net/>

Yetişkin bir insanın günlük beslenme ihtiyaçlarını karşılayacak beş temel besin elementi ile günlük minimum ihtiyaçlar aşağıda verilmiştir.

Besleyici Element	Günlük Minimum ihtiyaç
Karbonhidrat	134 gr
Protein	55 gr
Yağ	40 gr
Kalsiyum	0,5 gr
Demir	0,1 gr



Yetişkin bir insanın yiyeceklerden aldığı besin sayısı 20'ye yakın olmasına rağmen belirlenen beş besleyici elementten yeterli miktarlarda alındığında, diğer besleyici elementler için bir eksiklik duyulmamaktadır.

Bu besinlerin temin edilebileceği yiyecek türleri ve bunların 250 gramında (yaklaşık bir porsiyon) bulunan besin miktarlarıyla, her birinin birim fiyatları (₺/Porsiyon) aşağıda verilmiştir.

Besin Yiyecek	Karbonhidrat(gr)	Protein(gr)	Yağ(gr)	Kalsiyum(gr)	Demir(gr)	Fiyat (bir porsiyon)
Izgara	183	58,2	9,6	0,23	0,03	350
Fasulye	131,9	43,2	4,8	0,12	0,05	272
Patates	36,8	4,5	0,36	0,24	0,02	171
Kadayıf	55,2	0,26	0,10	0,26	0,04	43
Yoğurt	28,7	11,2	0,05	0,18	0,00	62

Bir yetişkin insan günlük besin gereksinimini minimum maliyetle temin edebilmesi için her yiyecek türünden ne kadar tüketmelidir. Problemin doğrusal programlama modelini kurunuz.

Çözüm: Bu problemde karar verici, yetişkin insan gibi görünmekle birlikte, gerçek hayatta ilgili beslenme uzmanı karar verici durumdadır. Amaç, minimum maliyetli besin gereksinimini karşılamak olup, her yiyecek türünden günlük tüketilebilecek miktarlar karar değişkenleri olacaktır.

Karar değişkenleri;

X_1 : bir günde tüketilecek ızgara miktarı

X_2 : bir günde tüketilecek fasulye miktarı

X_3 : bir günde tüketilecek patates miktarı

X_4 : bir günde tüketilecek kadayıf miktarı

X_5 : bir günde tüketilecek yoğurt miktarı

Şeklinde yazılabilir. Problemin doğrusal programlama modeli ise aşağıdaki gibi kurulacaktır.

$$\text{Min } Z = 350X_1 + 272X_2 + 171X_3 + 43X_4 + 62X_5$$

Kısıtlayıcılar

$$183X_1 + 131,9X_2 + 36,8X_3 + 55,2X_4 + 28,7X_5 \geq 134$$

$$58,2X_1 + 43,2X_2 + 4,5X_3 + 0,26X_4 + 11,2X_5 \geq 55$$

$$9,6X_1 + 4,8X_2 + 0,36X_3 + 0,1X_4 + 0,05X_5 \geq 40$$

$$0,23X_1 + 0,12X_2 + 0,24X_3 + 0,26X_4 + 0,18X_5 \geq 0,5$$

$$0,03X_1 + 0,05X_2 + 0,02X_3 + 0,04X_4 \geq 0,1$$

$$\text{ve } X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

Örnek 2.13. Bir at çiftliğinde uygulanacak beslenme programı ile atların beş besin maddesine olan günlük ihtiyaçları karşılanmak istenmektedir. Söz konusu beş besin maddesi; A,B,C,D ve E olarak tanımlanmış olsun. Beslenmede üç yem türü (Yulaf, Yonca ve Arpa) kullanılmaktadır. Üç yem çeşidinin 1 kg'ının içerdiği besin maddesi miktarları, günlük besin ihtiyaçları (kg) ve yem maliyetleri aşağıda verilmiştir.

Yem türü Besin Maddeleri	Yulaf (1 kg'da)	Yonca (1 kg'da)	Arpa (1 kg'da)	Min. Günlük İhtiyaç (kg)
A	0,2	0,3	0,1	6
B	0,05	0,1	0,05	2
C	0,3	0,5	0,6	9
D	0,1	0,15	0,2	8
E	0,05	0,05	0,15	5
Maliyet(₺/kg)	9	14	17	

Minimum maliyette günlük besin ihtiyaçlarını karşılayacak en iyi diyeti bulan doğrusal programlama modelini kurunuz.

Çözüm: Karar değişkenleri

X_1 : karışıma katılacak yulaf miktar

X_2 : karışıma katılacak yonca miktar

X_3 : karışıma katılacak arpa miktar

Amaç Fonksiyonu

$$\text{Min } Z = 9 X_1 + 14 X_2 + 17 X_3$$

Kısıtlayıcılar

$$0,2 X_1 + 0,3 X_2 + 0,1 X_3 \leq 6$$

$$0,05 X_1 + 0,1 X_2 + 0,05 X_3 \leq 2$$

$$0,3 X_1 + 0,5 X_2 + 0,6 X_3 \leq 9$$

$$0,1 X_1 + 0,15 X_2 + 0,2 X_3 \leq 8$$

$$0,05 X_1 + 0,05 X_2 + 0,15 X_3 \leq 5$$

$$\text{ve } X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Reklam Seçimi Problemi

Günümüz işletmeleri ürün ve hizmetlerini müşterilerine tanıtmak ve talebi artırmak için etkin reklam kampanyaları yürütürler. Reklamın amacına ulaşmasına yönelik olarak, etkili olacak reklam seçiminde doğrusal programlama kullanılmaktadır.

Örnek 2.14. Eskişehir’de 4 perakende dükkânından oluşan bir dükkân zincirinin reklam yöneticisi 2 medya seçeneğini göz önünde tutuyor. Biri yerel bir gazetede yarım sayfalık ilanlar, diğeri TVA’ daki reklamlardır. Reklam yöneticisi reklama maruz kalma oranının reklam kampanyasının sonunda şehir merkezinde en az %40, il genelinde de en az % 60 olmasını istiyor.

Söz konusu TV reklamı başına bu oran şehir civarında %5, il genelinde %3’tür. Yarım sayfalık gazete ilanı başına bu oran şehir merkezinde %4, il genelinde %3’tür. Yarım sayfalık gazete ilanının maliyeti ₺9.250, televizyon reklamının maliyeti ₺20.000’dir.

Amaç arzulanan hedefi karşılayacak en az maliyetli reklam stratejisini seçmektir. Doğrusal programlama modelini kurunuz.

Çözüm: Karar değişkenleri;

X_1 : Yarım sayfalık gazete ilanı sayısı (kaç gün çıkacak)

X_2 : TV reklamı sayısı

Amaç fonksiyonu;

$$\text{Min } Z = 9.250X_1 + 20.000X_2$$

Kısıtlayıcılar

$$0,05X_1 + 0,04X_2 \geq 0,40$$

$$0,03X_1 + 0,03X_2 \geq 0,60$$

$$\text{ve } X_1, X_2 \geq 0$$